

**Facharbeit
über das Thema:**

theoretische Grundlagen und praktische
Überprüfung des Funktionsprinzips einer
Wasserrakete

von Stephan Brunker

Inhaltsverzeichnis

1. Funktionsprinzip	Seite 3
2. Konkrete Berechnungen.....	Seite 3
3. Energiebetrachtung des Gases.....	Seite 4
(1) Betrachtung der isothermen Zustandsänderung:.....	Seite 4
(2) Berechnung der adiabatischen Zustandsänderung:.....	Seite 5
4. Geschwindigkeitsbetrachtung des Wasserstrahls.....	Seite 6
5. Bestimmung der Entleerungszeit t_{leer} :.....	Seite 7
6. Strömungsverluste in der Düse.....	Seite 7
7. Bestimmung der Raketengleichung.....	Seite 9
8. Optimierung des Füllverhältnisses f	Seite 10
9. Impuls des Wassers im Querschnitt A_1	Seite 10
10. Schubkraft und Beschleunigung.....	Seite 10
11. Raketenstart nach oben	Seite 11
12. Berechnung mit Luftwiderstand.....	Seite 11
13. Näherungsweise Berechnung mit EULER.....	Seite 12
Praktische Umsetzung	Seite 13

Anmerkung zur Formelschreibweise:

Zustandsgrößen sind *kursiv* geschrieben wie p_1 , V_1

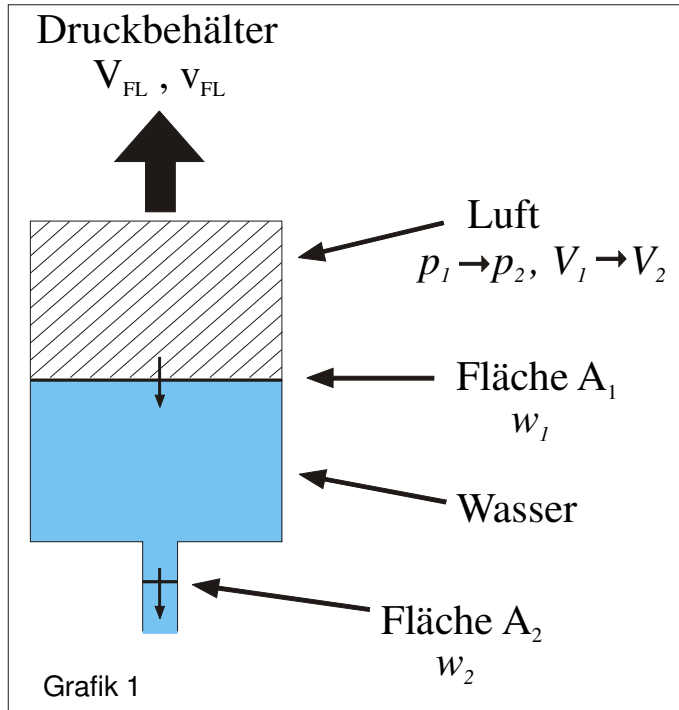
Konstanten bzw. feste Größen sind normal geschrieben wie ρ , R , V_{FL}

Da die Buchstaben der Physikgrößen nicht für die Verquickung von Gastheorie und Mechanik gedacht sind (p =Druck, aber auch p =Impuls, v =Geschwindigkeit, V =Volumen) gilt hier w =Geschwindigkeit und i =Impuls zur Vermeidung von Verwechslungen. Bei den Summenrechnungen ist n die Zahl der Summanden und n das Zwischenergebnis nach n Summanden.

Die verwendeten Formeln sind aus allgemeinen Formelsammlungen sowie strömungstechnischen Formelsammlungen entnommen.

Theoretische Grundlagen

1. Funktionsprinzip



Ein Druckbehälter mit dem Volumen V_{FL} wird im Anteil f mit einem gasförmigen Medium (Luft) unter Überdruck p_1 und einem flüssigen Medium (Wasser) mit der Dichte ρ gefüllt. Der Druckbehälter mit der Querschnittsfläche A_1 hat am unteren Ende eine Düse mit dem Querschnitt A_2 , die die Strömungsgeschwindigkeit der Flüssigkeit erhöht. Der Druck des Gases nimmt bis auf den Umgebungsdruck p_2 ab, wobei sich nach dem Satz von Boyle-Mariotte das Volumen erhöht. Die Flüssigkeit wird mit der Geschwindigkeit w_2 aus der Düse gedrückt. Dem aus dem Ausstoß entstehende Impuls ist gemäß dem Impulserhaltungssatz ein Impuls in

Flugrichtung entgegengesetzt, der den Druckbehälter nach oben beschleunigt.

Wir behandeln im folgenden den im praktischen Versuch eingesetzten Druckkörper:

V_{FL}	$= 0,003 \text{ m}^3$
A_1	$= 0,00608 \text{ m}^2$
A_2	$= 1,32 \times 10^{-4} \text{ m}^2$
$p_1 = p_L$	$= 9 \times 10^5 \text{ Pa}$
p_2	$= 1 \times 10^5 \text{ Pa}$
m_L	$= 0,219 \text{ kg}$
c_w	$= 0,2$
ρ	$= 1000 \text{ kg m}^{-3}$
χ	$= 1,4$

2. Konkrete Berechnungen

Parallel zu den Berechnungen in dieser Arbeit wurden die entstehenden Gleichungen mit der Mathematiksoftware „euler“ analysiert und Ergebnisse mit den obigen konkreten Zahlen errechnet.

3. Energiebetrachtung des Gases

Für alle Zustandsänderungen gilt der erste Hauptsatz der Wärmelehre:

$$Q = \Delta U + W$$

Q Zuführte Wärme
 ΔU Änderung der inneren Energie
 W vom System verrichtete Volumenarbeit $p\Delta V$

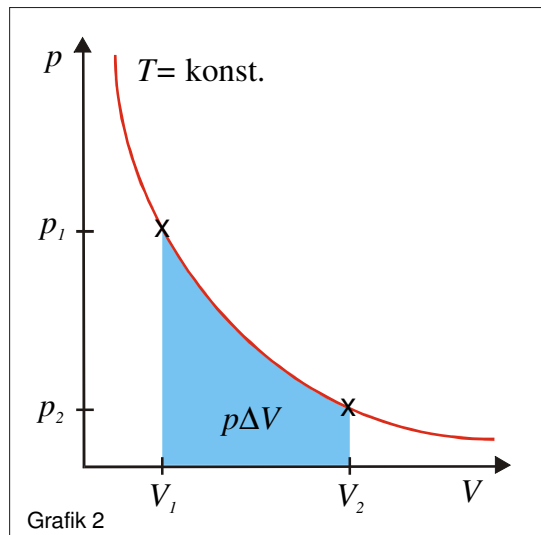
es gilt: $\Delta U = n R \Delta T$

n Stoffmenge
 R Universelle Gaskonstante
 ΔT Temperaturänderung

Aus dem Hauptsatz geht hervor, dass bei $W > 0$, also beim Verrichten von Volumenarbeit vom System, bei konstanter Temperatur $\Delta U = 0$ und somit Energie in Form von Wärme $Q > 0$ aufgenommen wird. Würde die Luft sich bei der Ausdehnung durch Aufnahme von Umgebungsenergie also nicht abkühlen, würde dieser einfache, isotherme Fall gelten.

Leider findet jedoch eine rasche Dekompression statt, bei der die Temperatur stark fällt. Für diesen Fall $Q = 0$, also bei Vermeidung von Wärmeaustausch mit der Umgebung, was durch die rasche Druckänderung bewirkt wird, ist $W = -\Delta U$, die Volumenarbeit wird vollständig aus innerer Energie geleistet. Wir werden die Vorgehensweise in diesem adiabatischen Fall analog dem isothermen Fall anwenden.

(1) Betrachtung der isothermen Zustandsänderung:



Die Volumenänderungsarbeit in einem Kolben ist $W = F \cdot \Delta s$

mit $F = p \cdot A$ und $\Delta s = \frac{\Delta V}{A}$ ergibt sich

$W = p \cdot \Delta V$, d. h. hier die Fläche unter der Isotherme im p-V-Diagramm (Siehe Grafik 2).

$$W = \int_1^2 p(V) \, dV$$

Mit dem Gesetz von Boyle-Mariotte:

$$p V = \text{konst.} = p_1 V_1$$

nach p aufgelöst und die Konstante $p_1 V_1$ aus dem Integral ausgeklammert:

$$W = p_1 V_1 \int_1^2 \frac{1}{V} \, dV$$

und somit als Lösung dieser Integralgleichung:

$$W = p_1 V_1 \ln \left(\frac{V_1}{V_2} \right)$$

und mit $V_2 = V_{FL}$ und $V_1 = f V_{FL}$, $p_1 = \text{Ladedruck } p_L$

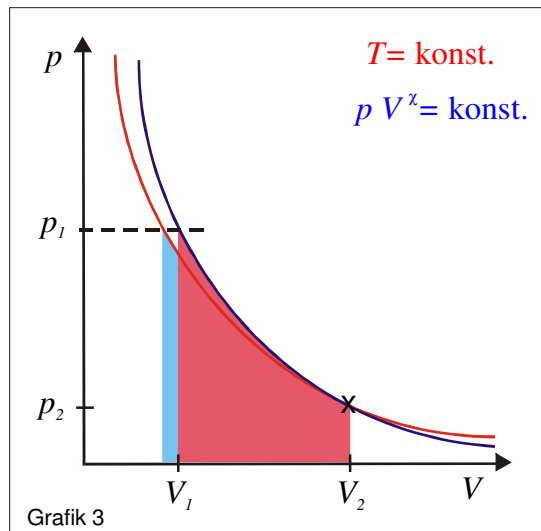
$$W = p_L V_{FL} f \ln\left(\frac{1}{f}\right)$$

Es ergibt sich für $W(f)$ ein Maximum bei $f = 0,3678$.

Für den konkreten Druckkörper ergibt sich daraus $W_{isotherm} = 993 \text{ J}$.

Diese Energie würde ausreichen, um die Leermasse auf 95 m s^{-1} zu beschleunigen, was wiederum für 460 m Höhe ausreichen würde. Leider ist dieser 100%-ige Wirkungsgrad nicht gegeben, da die Energie zum größten Teil an die Masse des Wassers abgegeben wird.

(2) Berechnung der adiabatischen Zustandsänderung:



Bei einer adiabatischen Ausdehnung wird keine Wärme abgegeben oder aufgenommen, d. h. die Volumenarbeit wird komplett aus innerer Energie geleistet. Durch die Abkühlung des Gases verläuft die Adiabate (blau) steiler als die Isotherme (rot). Aus nebenstehendem Diagramm wird ersichtlich, daß sich bei gleichbleibender Druckdifferenz $p_1 - p_2$ die Volumendifferenz $V_1 - V_2$ kleiner als bei der isothermen Zustandsänderung ist.

Analog zur isothermen Kompression erhält man für die Volumenarbeit das Integral:

$$W = \int_1^{\Pi} p(V) dV$$

Für adiabatische Zustandsänderungen gilt $p V^x = \text{konst.} = p_1 V_1^x$ und somit wie bei (1):

$$W = p_1 V_1^x \int_1^{\Pi} \frac{1}{V^x} dV$$

als Lösung der Integralgleichung erhält man

$$W = p_1 V_1^x \frac{V_2^{1-x} - V_1^{1-x}}{(1-x)}$$

zu guter letzt in unserem konkreten Fall mit $V_1 = V_{FL}$ und $V_2 = f V_{FL}$, $p_1 = \text{Ladedruck } p_L$

$$W = p_L f^x V_{FL}^x \frac{(V_{FL}^{1-x} - f^{1-x} V_{FL}^{1-x})}{(1-x)}$$

Und zusammengefaßt:

$$W = p_L V_{FL} \frac{(f^x - f)}{(1-x)}$$

mit dem Maximum $f = 0,4312$.

Mit den gleichen Zahlen wie bei der isothermen Kompression sind dies $W_{adiabatisch} = 831 \text{ J}$, also 17% weniger als im isothermen Fall. Damit sinkt die Höhe auf 386 Meter bei 100% Wirkungsgrad.

4. Geschwindigkeitsbetrachtung des Wasserstrahls

Für eine Düse wie in Grafik 1 gilt der Energieerhaltungssatz:

$$E_{\text{pot}} + E_{\text{kin}} + E_{\text{druck}} = \text{konst.}$$

Aus dem Energieerhaltungssatz ergibt sich die Bernoullische Strömungsgleichung:

$$\rho g h + p + \frac{1}{2} \rho w^2 = \text{konst.}$$

Die Komponente $\rho g h$ werden wir im folgenden außer Acht lassen, da der Ausfluss unter Schwerkrafteinwirkung keinen Rückstoß erzeugt. Somit ergibt sich für den reinen Druckausstoß:

$$p + \frac{1}{2} \rho w^2 = \text{konst.}$$

Somit gilt für die Zustände an den Querschnitten A_1 und A_2 :

$$\frac{1}{2} \rho (w_1^2 - w_2^2) = p_2 - p_1 \qquad \frac{1}{2} \rho (w_2^2 - w_1^2) = p_1 - p_2$$

und mit der Kontinuitätsgleichung $w_1 A_1 = w_2 A_2$ nach w_1 bzw. w_2 aufgelöst und eingesetzt:

$$w_1^2 = \frac{2(p_2 - p_1)}{\rho \left(1 - \left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2\right)} \qquad w_2^2 = \frac{2(p_1 - p_2)}{\rho \left(1 - \left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2\right)}$$

Mit $p_2 = \text{Außendruck } p_A$ und

$$p_1 = \frac{p_L f^x V_{\text{FL}}^x}{V_i^x}$$

erhält man die Funktion $w_1(V_i)$:

$$w_1 = \sqrt{\frac{2 p_A - \frac{2 p_L f^x V_{\text{FL}}^x}{V_i^x}}{\rho \left(1 - \left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2\right)}} \qquad w_2 = \sqrt{\frac{\frac{2 p_L f^x V_{\text{FL}}^x}{V_i^x} - 2 p_A}{\rho \left(1 - \left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2\right)}}$$

Analysiert man diese Formel, so ergibt sich zum einen, dass $w_2(V)$ stark fällt, je näher V sich V_{FL} nähert. Dies ist einleuchtend, da der Druck ebenfalls stark nachlässt.

Interessanter ist die Abhängigkeit von A_2/A_1 . Die Geschwindigkeit nimmt fast exponentiell zu, je weiter sich beide Größen annähern. Eine Erhöhung des Ladedrucks führt nur zu einer ungefähr proportionalen Steigerung.

5. Bestimmung der Entleerungszeit t_{leer} :

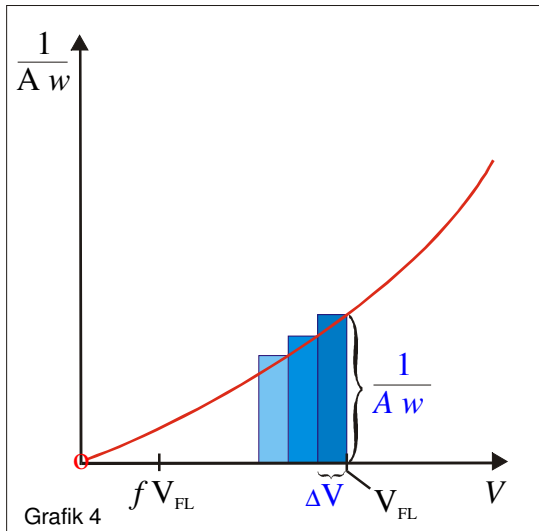
Zur Bestimmung der Entleerungszeit t_{leer} betrachten wir den Massenstrom²:

$$\mu = \rho A w = \frac{m}{t}$$

ersetzen wir $m = V \rho$ und lösen wir nach t auf, so erhalten wir:

$$t = \frac{V}{A w}$$

betrachten wir die im Abschnitt 3 erhaltene Funktion $w_2(V)$, hier umgeformt als:



Wir sehen hier, dass jede einzelne Fläche unter dem Graphen gemäß obiger Gleichung die Ausströmzeit für das Volumen ΔV darstellt. Für die gesamte Fläche von $f V_{FL}$ bis V gilt deshalb das Integral:

$$t = \int_{f V_{FL}}^V \frac{1}{A w(V)} dV$$

Dieses Integral ist jedoch leider nicht in Form einer gebrochen rationalen oder einer anderen Funktion aus dem Inhalt der Oberstufenmathematik lösbar. Da im weiteren alle Funktionen auf nicht integrierbaren Integralen beruhen, muss man auf eine numerische Integration und auf die Näherung

$$t = \frac{(1-f)V_{FL}}{1000} \sum_{f V_{FL} = n_1}^{V_{FL} = n_{1000}} \frac{1}{A w(V)}$$

zurückgreifen, in der das Integral als Summe von n Einzelflächen unter dem Graphen dargestellt wird. Für eine genauere Berechnung beherrscht die Software euler die numerische Integration nach SIMPSON zur Gewinnung der Endsumme, außerdem wurde zur Gewinnung eines Graphen die Tangentenmethode über n (1000) Punkte angewandt, die für jedes n einen Wert ausgibt und damit – näherungsweise - die Funktion $t(n)$ generiert.

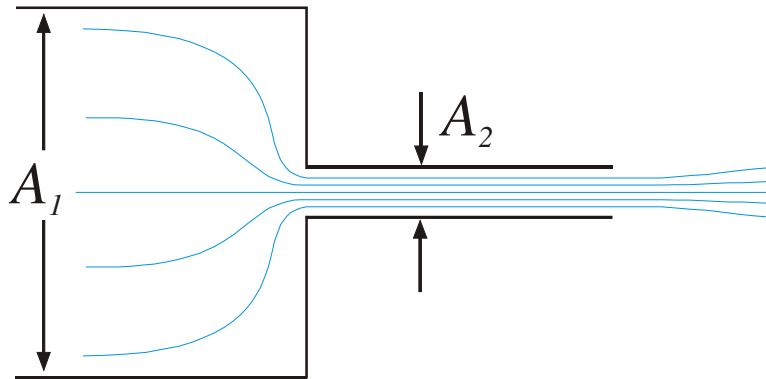
Für den konkreten Fall ergibt sich $t_{AUS} = 0,28$ s.

6. Strömungsverluste in der Düse

Der obige Wert für t_{AUS} ist jedoch so noch nicht korrekt, da im praktischen Versuch eine Größenordnung von ca. 0,45 s gemessen worden ist.

Eine Möglichkeit wäre die Masseträgheit des Wassers. Die Wassermasse hat zu Beginn die Geschwindigkeit $w = 0$, muss also erst beschleunigt werden. Eine einfache Abschätzung mit Hilfe der Grundgleichungen beschleunigter Bewegung zeigt jedoch, dass für die auf die Fläche A_1 wirkende Kraft die Zeit im Hundertstelsekundenbereich liegt.

Es handelt sich also um Reibungs- bzw. Strömungsverluste in der Düse. Der Wasserstrom besteht in diesem Fall aus drei Teilen:



- Der Flasche A_1 , hier als Rohr zu betrachten
- Einem plötzlichen Übergang von A_1 zu A_2
- Der Ausströmdüse A_2 , ein Rohr mit einer großen Länge im Verhältnis zum Durchmesser
- Ausströmen ins Freie

Für den letzten Punkt zeigt ein einfacher praktischer Versuch, dass hier ein zu vernachlässigender Verlust auftritt. Das Wasser verlässt ein Rohr mit ausreichender Länge ohne nennenswerte Auffächerung. Dies ist für die nachfolgende Betrachtung des Impulses bedeutsam. Die Quelle für den Strömungsverlust ist die plötzliche Verengung. Hierfür gibt es eine erweiterte Form für die Strömungsgleichung, die den Druck- bzw. den Energieverlust im plötzlichen Übergang berücksichtigt, hier direkt mit der Dichte ρ multipliziert als Druckgleichung:

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho w_1^2 = p_2 + \frac{1}{2} \rho w_2^2 + Y\rho$$

Für den Verlustanteil Y mit dem Faktor ξ gilt der Zusammenhang für die Geschwindigkeit w_2 :

$$Y\rho = \xi \frac{w_2^2}{2} \rho \quad ; \quad \xi = \left(\frac{1}{\alpha} - 1 \right)^2 \quad ; \quad \alpha \sim 0,58 \text{ für scharfkantiges Loch}$$

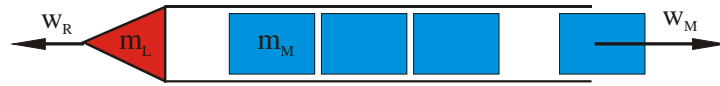
Setzt man die Größen entsprechend ein und löst wieder nach w_2 auf, so lautet die Gleichung jetzt:

$$w_2^2 = \frac{2 (p_1 - p_2)}{\rho \left(1 - \left(\frac{A_2}{A_1} \right)^2 + \left(\frac{1}{\alpha} - 1 \right)^2 \right)}$$

Mit dieser Gleichung verfahren wir wie vor (Integration ...). Es ermittelt sich für den Versuchskörper jetzt eine Ausströmzeit von 0,35 Sekunden, die durchaus im Rahmen der Messgenauigkeit liegt.

7. Bestimmung der Raketengleichung

Betrachten wir zunächst einmal eine Rakete, die mit dem Ausstoß von Einzelmassen arbeitet:



Für den Ausstoß der ersten Masse gilt der Impulserhaltungssatz unabhängig vom Bezugssystem, da $w_R=0$:

$$\dot{i}_R = \dot{i}_M$$

$$w_R (m_L + (n-1) m_M) = w_M m_M, \text{ wobei } n \text{ die Anzahl der Massen bestimmt.}$$

löst man die Gleichung nach der Geschwindigkeit w_R der Rakete auf, so erhält man:

$$w_R = \frac{w_M m_M}{m_L + (n-1) m_M}$$

Beim nächsten Ausstoß eines Massekörpers ist Δw_R genauso zu berechnen, da sich im Bezugssystem der Rakete die Geschwindigkeit bei jedem Massenausstoß um den gleichen Betrag erhöht. Dadurch kann die Gesamtgeschwindigkeit als Summe dargestellt werden:

$$w_R = \sum_{t=1}^n \frac{w_M(t) m_M}{m_L + (n-t) m_M}$$

Setzt man jetzt diese Gleichung um auf ein flüssiges Medium, so ist m_M sehr klein zu wählen, nämlich dm_M , wobei wir wieder bei der Integration wären. m_M im Zähler wird zu ρdV , der Nenner wird ausmultipliziert :

$$w_R = \int_{V=0}^{V_w} \frac{w_2(V) \rho}{m_L + (V_w - V) \rho} dV$$

wobei V hier für das ausgeströmte Medium und V_w für die Startmenge des Mediums steht. Klammert man ρ aus und normiert man V auf die gesamte Flasche, dann ist die Restmenge $V_w - V$ umgesetzt $V_{FL} - V$ und es ergibt sich:

$$w_R = \int_{fV_{FL}}^V \frac{w_2(V)}{\frac{m_L}{\rho} + V_{FL} - V} dV$$

Auch dieses Integral wird durch die Tangentenrechnung zur Funktion $w_R(n)$. Betrachtet man aber die in den Formeln vorkommenden Größen, so ergibt sich für kleine A_2/A_1 und bei nicht veränderbarem Luftdruck nur p_L als entscheidende Größe für $w_2(V)$. Zusammen mit obiger Formel ergeben sich praktisch nur folgende Entscheidungskriterien:

- w_R ist direkt abhängig vom Ladedruck p_L
- Die Endgeschwindigkeit hängt stark vom Verhältnis m_L/V_{FL} ab

Da aber durch die notwendige Druckfestigkeit der Behälter ein Verhältnis m_L/V_{FL} von unter 0,1 nicht zu erreichen ist, ist die erreichbare Höhe auf etwa 100 Meter bei 8 Bar begrenzt.

8. Optimierung des Füllverhältnisses f

Für ein festgelegtes Füllverhältnis f ergibt sich aus dem Integral die maximal erreichbare Geschwindigkeit. Wie oben gesagt, muss das Integral numerisch bestimmt werden, hier wurde das auszustoßende Volumen in 1000 Teile geteilt und so errechnet. Im folgenden werde ich die numerischen Integrale wie Funktionen verwenden, da es für den praktischen Gebrauch ausreicht, die Funktion über n Punkte zu kennen. Trägt man die Maximalwerte von $w_R(V)$ zu f auf, so erhält man ein Maximum, im konkreten Fall:

für $p_L = 9 \times 10^5$ Pa ergibt sich für $f \sim 0.565$, also etwas mehr Luft als Wasser.

9. Impuls des Wassers im Querschnitt A_1

- Eine zusätzliche Problematik liegt im Impuls des in der Flasche befindlichen Wassers. Wir sind im bisherigen davon ausgegangen, dass an der Düse Wasser mit der Anfangsgeschwindigkeit $w_2(f \cdot V_{FL})$ austritt. Dies ist aber nicht der Fall, da das Wasser in der Flasche erst auf $w_1(f \cdot V_{FL})$ beschleunigt werden muss. Betrachten wir aber kleine A_2 im Verhältnis zu A_1 (etwa 15:1), dann wird der benötigte Impuls, die Beschleunigungszeit und damit auch der Einfluß dieser Größe klein. Für den Rückstoß ist sowieso nur entscheidend, was das geschlossene System Rakete verlässt („Entscheidend ist, was hinten rauskommt“), denn nur dieses kann einen Impuls erzeugen. Ein schwarzer Kasten ohne Öffnungen kann sich nicht vorwärts bewegen, da ein im Inneren geworfenes Gewicht zwar Rückstoß erzeugt, dieses aber beim Aufprall wieder eine entgegengesetzten Impuls erzeugt.

Andererseits stimmen die Werte für große A_2 dann aber nicht. Im Extremfall $A_1=A_2$ hätten wir dann aber auch keine Rakete, sondern eher ein Artilleriegeschoss.

10. Schubkraft und Beschleunigung

Diese interessanten Kenngrößen errechnen sich wie folgt:

$$F_{Sch}(n) = \frac{w_R(n) \Delta m}{\Delta t} \quad \text{mit } \Delta m = (1-f) V_{FL} n^{-1} \text{ und } \Delta t = t(n) - t(n-1)$$

Da die numerischen Integrale für die Zeit und die Ausströmgeschwindigkeit über der gleichen Basis ($f \cdot V_{FL} : V_{FL}$) in der gleichen Teilung n ermittelt wurden, sind w_R und Δt sowie über die gleichen Punkte definiert.

$$a(n) = \frac{F_{Sch}(n)}{m_R(n)}$$

Selbiges gilt auch für die Beschleunigung, da mit dem in n Teile geteilten Volumen auch die jeweilige Restmasse m_R bestimmt werden kann.

11. Raketenstart nach oben

Der Zeit-Weg-Graph muß in zwei Teilen ermittelt werden: Im ersten Teil (AUS) wird die Rakete durch den Schub nach oben beschleunigt und durch die Erdanziehung nach unten. Im zweiten Teil wirkt nur noch die Erdanziehung (F).

Die zurückgelegte Strecke der Beschleunigungsphase ergibt sich aus der Geschwindigkeit mal der Zeit in jedem Intervall n , dieses wird dann fortlaufend aufsummiert. Dies ist die näherungsweise Rechnung des korrekten Integrals $s = \int a \cdot t \, dt \Rightarrow s = \frac{1}{2} a t^2$ für die beschleunigte Bewegung.

$$s_R(n) = \sum_{n=1}^n w_R(n) \Delta t$$

Wird die Rakete nach oben gestartet, wirkt hier die Erdanziehung, so dass für die Höhe noch die durch die Erdanziehung in Gegenrichtung zurückgelegte Strecke abgezogen werden muß:

$$h_{AUS}(n) = s_R(n) - \frac{1}{2} g t(n)^2$$

Für den gleichmäßig beschleunigten Freien Fall gelten dann die Grundgleichungen der Mechanik:

$$h_F(t_F) = w_F \cdot t_F - \frac{1}{2} g t_F^2$$

wobei w_F die Nettogeschwindigkeit am Ende der Beschleunigungsphase ist.

Kombiniert man beide Flugphasen, ergibt sich ein $h - t$ - Graph. Da man bei Graphen über n Punkte ist, kann man zweckmäßigerweise auch ein Intervall für t_F angeben, da dies für den Luftwiderstand sowieso benötigt wird. Die Gesamthöhe liegt bei 147 Metern, die Zeit bei 11 Sekunden. Allerdings wurde der Luftwiderstand noch nicht berücksichtigt. Die Ungenauigkeiten der numerischen Berechnung für $n=1000$ respektive einer Zeitteilung von 1/100 Sekunde können vernachlässigt werden, da sie sich im Zentimeter-Bereich abspielen.

12. Berechnung mit Luftwiderstand

Für die Berechnung des Luftwiderstandes nach der Gleichung

$$F_L = \frac{1}{2} c_w \rho w_R^2 A$$

mit der Querschnittfläche $A = A_1$, unter Vernachlässigung eventueller Anhänge, den Luftwiderstandskoeffizienten c_w mit $\sim 0,2$ und die Luftdichte ρ mit $1,293 \text{ kg m}^{-3}$. Hierzu muss man die Raketengeschwindigkeit w_R auf die Geschwindigkeit durch die Luft reduzieren, also die Erdbeschleunigung abziehen:

$$w_{RS}(n) = w_R(n) - g t(n)$$

aus den Grundgleichungen der Mechanik

$$F = m \cdot a \quad V = a \cdot t$$

Ergibt sich eine durch den Luftwiderstand entstehende Bewegung entgegengesetzt der Flugrichtung von :

$$w_{RLV} = F_L t m_R^{-1}$$

Da es sich um keine gleichmäßige Beschleunigung handelt, müssen wir wie bei dem Rückstoß die Geschwindigkeiten Δw_{RLV} über Δt aufaddieren, um wieder eine Näherung für $w_{RLV}(n)$ zu erhalten.

Für jeden Abschnitt n ziehen wir die so aufaddierte Geschwindigkeit von der unbeeinflussten Geschwindigkeit ab.

$$w_{RL}(n) = w_{RS}(n) - w_{RLV}(n) ,$$

wobei es sich um eine rekursive Rechnung handelt, da w_{RLV} von w_{RL} abhängig ist. Dies erfolgt durch eine entsprechend programmierte Schleife, die die jeweiligen Berechnungen vornimmt. Durch Multiplikation mit Δt und Aufsummierung gewinnen wir wiederum die zurückgelegte Höhe.

Analog können wir in der Freiflugphase verfahren, wo wir die durch den Luftwiderstand entstehende Bewegung mit der konstanten Bewegung nach oben und der beschleunigten Bewegung nach unten kombinieren, wobei es sich wiederum um eine rekursive Rechnung handelt, da für den Luftwiderstand ja die momentane Geschwindigkeit gegenüber der Luft zählt. Dies führt auch dazu, dass sich die Bewegungsrichtung des Luftwiderstandes am Scheitelpunkt der Bewegung umkehrt.

13. Näherungsweise Berechnung mit EULER

Die Mathematik-Software EULER ist eine Open-Source-Software, die unter folgender Adresse erhältlich ist:

<http://mathsrv.ku-eichstaett.de/MGF/homes/grothmann/euler/>

Die Berechnungen dieser Arbeit wurden in zwei Teilen durchgeführt, wobei der erste Teil – das „Notebook“ *wasserrakete4.en* die Berechnungen in der Kommandozeile nacheinander durchführt. Um diese nachzuvollziehen, muss jede Zeile mit `<enter>` bestätigt werden. Dadurch können alle Berechnungen nachvollzogen werden. Zwei Files (*userrakfunc.e* und *userfunctions.e*) sind aber ausgelagert worden und müssen im Unterordner `\progs` zur Verfügung stehen.

Das euler-File *wasser3.e* kombiniert die gesamte Berechnung in einer Funktion, wo nur noch die Ausgangsparameter angegeben werden müssen. Die Berechnung einer zweistufigen Rakete beruht auf den gleichen Rechnungen, nur müssen drei Flugphasen berechnet werden und das Gewicht erhöht sich um das Gewicht der zweiten Stufe. Diese Berechnung findet sich unter *wasser4.e* .

Praktische Umsetzung

Die Praktische Umsetzung ist in bebildeter Form auf meiner Webseite

<http://www.stephan-brunker.de/Wasserrakete/wasserrakete.html>

ausführlich erläutert. Insbesondere die technischen Probleme, wie die Entwicklung einer geeigneten Startplattform, eines Füll- und Auslösemechanismus sowie ein funktionierendes Rückholssystem sind dort ausführlich beschrieben. Leider konnte aufgrund technischer Beschränkungen keine genaue Messung durchgeführt werden. Die Größenordnung der durch die theoretische Rechnung ermittelten Größen ist jedoch realistisch. Die Anzahl der beteiligten Parameter ist auch zu groß, um hier eindeutige Aussagen treffen zu können.